Anticiper, structurer sa pensée, construire des outils numériques
Les mathématiques de l'école maternelle sont elles trop simples à enseigner ?

Entre le « laissez-les jouer » et la transposition imprudente des « maths modernes » des années soixante-dix à l'école maternelle, l'élémentarisation rampante de cette école au cours des années 90-2008, les programmes de 2015 lestés par des « recentrages » ministériels incessants, le retour au « laisser–les-jouer » prôné par certaines méthodes, le domaine parfois appelé « mathématiques à l'école maternelle » n'est pas un long fleuve tranquille. Comment s'y retrouver ?

Etat des lieux

Avant l'école maternelle

Depuis leur naissance, les enfants ont des connaissances initiales liées à leur vécu et donc une intuition des grandeurs qui leur permet de comparer et d'évaluer de manière approximative les longueurs (les tailles), les volumes, mais aussi les collections d'objets divers (« il y en a beaucoup », « pas beaucoup »...). Ils savent se déplacer dans des espaces familiers avec une intention (aller chercher son doudou rangé dans un endroit précis). Ils apprennent à contrôler des milieux divers (monter une tour le plus haut possible en empilant des cubes), à anticiper (le moment où cela risque de tomber pour reprendre l'exemple de la tour). Très tôt, dans des jeux, il est possible d'observer les enfants qui « s'attendent » à un effet de leur geste. Ces schèmes de pensées qui permettent d'agir sur le monde sont constitutifs de la construction des mathématiques futures de l'élève.

À l'entrée à l'école maternelle

Un des objectifs majeurs de l'école est de permettre à l'élève de construire des « outils pour structurer sa pensée » dans les domaines de l'espace, des grandeurs, des nombres. Ces notions sont liées entre elles. C'est par l'usage que revient aux mathématiques et à leur enseignement la responsabilité de la construction de ces outils par les enfants. Malheureusement, on assiste actuellement à un faux débat qui consiste à laisser croire qu'il y aurait incompatibilité entre « apprendre à structurer sa pensée » et acquérir des savoirs mathématiques indispensables au futur des élèves[1]. D'ailleurs, savoir s'il convient d'utiliser le terme « mathématiques » à l'école maternelle ou non est sans importance. Ce qu'il convient de bien expliciter sont les savoirs mathématiques spécifiques de l'école maternelle qui sont les fondations des savoirs futurs de l'école élémentaire et donc de s'abstenir d'effectuer un enseignement prématuré de notions à construire plus tard. Enseigner les mathématiques à l'école maternelle implique donc une double préoccupation : la première est celle qui consiste à conduire une réflexion sur l'organisation des savoirs (savoirs spatiaux, savoirs pré-numériques) spécifiques aux élèves de cet âge, la seconde consiste en la construction de « milieux » suffisamment riches et motivants qui concilient acquisition de ces savoirs et structuration de la pensée.

L'organisation de ces « milieux » d'apprentissage suppose donc la construction de dispositifs propres à l'école qui permettent aux élèves de s'appuyer sur ce qu'ils ont déjà dans leur capital personnel pour construire les savoirs nouveaux décontextualisés de leur milieu familial. Pour cela, le « jeu » est souvent adopté. Malheureusement ce terme polysémique sert de faire valoir à des options pédagogiques parfois opposées. Il existe différentes conceptions du jeu et de son rôle. Si tout le monde s'accorde à dire que le jeu est une activité importante pour le développement du jeune enfant il y a un écart important entre le sens du mot « jeu » selon l'école Montessori qui serait « l'opposé du travail » et son sens en didactique des mathématiques qui permet de préciser la notion de situation à l'aide de ce que Brousseau nomme les situations a-didactiques[2]. Dans cette seconde acceptation, la notion de jeu est alors à rapprocher de celle de milieu, le milieu étant constitué des objets (physiques, culturels, sociaux, humains) avec lesquels le sujet interagit dans une situation. C'est de l'organisation de tels milieux dont il est alors question pour élaborer des situations d'enseignement. Or, ce projet pédagogique est brouillé par des notes de service qui affichent des attendus en termes de savoirs en donnant à croire, intentionnellement ou non, qu'il s'agit de consignes d'organisation d'enseignement. Par exemple, dans le domaine du pré-numérique, lorsqu'il est écrit : « L'itération de l'unité (trois c'est deux

[1] Pour rafraîchir la mémoire des rédacteurs des notes de service : *"Il m'a paru qu'en général, on ne devrait rien enseigner aux enfants sans leur en avoir expliqué et fait sentir les motifs. Ce principe me semble très essentiel dans l'instruction, mais je le crois surtout fort avantageux en arithmétique et en géométrie. Ainsi des éléments de ces sciences ne doivent pas seulement avoir pour but de mettre les enfants en état d'exécuter sûrement, et facilement par la suite, les calculs dont ils peuvent avoir besoin, mais doivent encore leur tenir lieu d'éléments de logique et servir à développer en eux la faculté d'analyser leurs idées, de raisonner avec justesse."* Nicolas de Condorcet. 1743-1794.

[2] Pour un approfondissement, voir « Théorie des situations didactiques » G.Brousseau 1998 ed. La pensée sauvage pp.80-87.

et encore un) se construit progressivement, et pour chaque nombre », certains enseignants vont penser qu'il faudra enseigner l'itération de l'unité de façon purement transmissive. Or, pour reprendre les mots de Bachelard, « Toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance... ». Certes, l'itération est un constituant de la conceptualisation du nombre et il est important d'observer si les élèves la maitrisent mais il reste à construire les situations qui vont générer ce savoir parmi d'autres. Dès lors, l'itération de l'unité devient un observable au sein de situations a-didactiques visant la conceptualisation du nombre.

Les pratiques enseignantes

Traditionnellement, les activités mathématiques de l'école maternelle se déroulent autour de rituels, de situations fonctionnelles : celles dans lesquelles l'enseignant·e propose aux élèves~~,~~ la prise en charge des aspects mathématiques d'une situation liée au fonctionnement général de la classe ou au fonctionnement d'une autre activité, celles où sont proposés des jeux : ateliers de jeux de société, de construction, etc., celles de situations construites à partir de fichiers. Au travers de ces activités, les élèves côtoient des objets mathématiques. Dès lors, il est tentant de faire « découvrir le monde » par une simple imprégnation culturelle. Mais prenons l'exemple des premiers nombres : ceux ci sont tellement culturellement connus qu'il semble que leur construction paraisse aller de soi et que leur enseignement puisse se réduire à leur présentation en vue d'une familiarisation, d'une imprégnation. C'est ignorer que leur construction se fonde sur une genèse, celle des grandeurs depuis la toute petite enfance, puis passe par une appropriation progressive d'ensemble de signes, de règles, de modes de raisonnement, à un âge ou la conservation des quantités n'est pas encore stabilisée[3]. Cela suppose donc, pour l'enseignant·e, d'acquérir une posture permettant de mettre en avant, non pas l'élève ou le savoir, mais « la situation comme système d'interactions de l'élève avec un milieu censé lui permettre de faire évoluer ses connaissances [4] ». Il s'agit donc de proposer des situations où les premiers nombres, par leurs premières écritures, constitueront la solution optimale au problème posé aux élèves. En effet, la pratique des

[3] Piaget J. & Szmeinska A. (1941- et éd.67) "*La genèse du nombre chez l'enfant*". Neufchâtel. Paris. Delachaux et Niestlé.
[4] Brousseau G. (1997). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

mathématiques est liée à la construction d'un langage ayant sa propre consistance[5], qui permet, le cas échéant, d'aider à contrôler une situation (contre-rôle : c'est-à-dire élaborer un ensemble de signes qui assure la tenue, en double, de la situation). Une entrée dans l'écrit est donc constitutive de la conceptualisation du nombre et plus généralement des activités mathématiques et ceci dès la maternelle.

Manipuler oui, mais…

A l'école maternelle, les enfants manipulent : oui mais... Du jeu aux situations d'apprentissage par adaptation

Prenons un exemple connu en petite section : une activité de « tri » consiste à demander à des élèves de petite section, de trier trois catégories de graines posées en vrac en les mettant dans des boîtes. Pour cela, trois boîtes identiques sans couvercle sont à leur disposition afin qu'ils puissent mettre une catégorie de graines par boîte. En général, les élèves réussissent assez vite. Le matériel aide à mener à bien la tâche demandée, mais qu'est-ce que l'élève apprend ?

Fermons maintenant les boites (boîtes tirelires, c'est-à-dire dans lesquelles on peut glisser une graine sans voir les graines déjà mises). L'élève doit alors « inventer » une stratégie qui permette de prendre les bonnes décisions aux moments sensibles. La stratégie décrite précédemment, où l'élève prend les graines et les boîtes au hasard et corrige « à la vue » n'est plus possible : comment savoir si la graine est semblable à celles qui sont déjà dans la boîte ? Comment prendre une autre boîte ? Avec les boîtes fermées, toutes identiques, le matériel joue alors un tout autre rôle. Les rétroactions qu'il induit permettent d'inventer les stratégies adéquates et de

[5] Rebière M. (2012) Cours 4 de la 16° école d'été de didactique des mathématiques : *« S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? »*

mobiliser les savoirs visés par l'enseignant·e. Et l'enjeu est de taille : on ouvrira, après, pour voir si on avait bien prévu !

En conclusion, le premier jeu, avec les boîtes ouvertes permet de comprendre la règle d'un jeu qui se jouera plus tard, quand les boîtes seront fermées. Le jeu qui permet l'acquisition du savoir mathématique visé se joue boîtes fermées[6]. C'est parce que les boîtes sont fermées que le contrôle de l'action peut s'exercer par un travail cognitif d'énumération. (Nous reviendrons sur cette notion). Le premier jeu, avec les boîtes ouvertes ne serait qu'un préalable.

La place et le rôle de la manipulation en mathématiques constituent donc une variable significative pour qualifier l'activité du sujet. La distinction entre une manipulation sans enjeux cognitifs et une manipulation au service d'une conceptualisation est déterminante.[7]

À l'école maternelle, mise à distance entre l'intention, l'action et les effets de l'action.

Il importe que dans les situations proposées en mathématiques, à l'image de celle qui vient d'être décrite, il existe un temps entre le moment où l'élève agit à partir de premières intentions, de conjectures, et de stratégies personnelles, et celui où il constate les effets de son action induite. Celle-ci est alors réglée par de l'anticipation. Viendra ensuite le moment de constater si l'anticipation était correcte ou non et de recommencer le cas échéant. Ce système d'interactions va permettre aux élèves de faire évoluer leur connaissance. Dans l'exemple qui précède, c'est la connaissance du tri qui est sous jacente à l'activité.

Ce type de situations se rapproche de situations de jeux à règles. En particulier la motivation ne doit pas être recherchée ailleurs que dans le plaisir de réussir à un jeu. L'existence de contraintes qui s'apparentent à la règle d'un jeu, constitue d'ailleurs un environnement avec lequel un enfant apprend à dépasser la déception d'échouer au profit du plaisir de réussir. Le rôle de l'enseignant est important dans ces

---

[6] Voir l'activité dite « tri de graines » dans Briand-Salin-Loubet 2004. "Mathématiques en maternelle » CDROM. Hatier.

[7] BRIAND J. (2018) « Manipuler…oui mais, Revue « au fil des maths », APMEP n° 530. ; BRIAND J. (2007) « La place de l'expérience dans la construction des mathématiques en classe", Revue « petit x », n° 75, pp. 7-33, 2007.

situations. Elles permettent de ne pas être celui ou celle qui dit la réussite ou l’échec mais plutôt de compatir devant l’échec, de partager le plaisir de voir une réussite, d’accompagner dans les apprentissages.

Focus sur le numérique

Pour des raisons dues au fait qu’actuellement la « pression » pour enseigner prématurément le numérique est forte, il est nécessaire de préciser les savoirs spécifiques que l’école maternelle peut faire acquérir dans ce domaine. Une autre étude permettrait d’aborder le spatial, la désignation et donc les rôles des premiers écrits. Sans pouvoir mener à terme cette nouvelle étude ici, nous allons voir toutefois que ces trois domaines sont liés. Le nombre a deux fonctions principales : la première est de signifier la mesure d’une quantité, la seconde est de représenter une position.

La construction des premiers nombres, mesure d’une quantité, à l’école maternelle

Les savoirs en jeu pour l’enseignement des nombres à l’école maternelle sont les savoirs que les élèves doivent acquérir mais aussi les savoirs didactiques nécessaires à l’enseignant·e pour qu’il·elle puisse proposer des situations permettant l’acquisition de ces savoirs. Nous l’avons dit, très tôt les élèves s’amusent à compter. Qu’est ce que cela signifie ? Suffit-il de solliciter les élèves par des activités rituelles et des exercices d’entraînement simples ? Comment s’effectue le passage de la maîtrise des quantités à la maîtrise des nombres ? Certains textes ne nous éclairent pas beaucoup : voir que l’on continue à préconiser la connaissance de la comptine numérique de 1 à 30 comme s’il s’agissait d’une conceptualisation du nombre rend un peu perplexe. Si les élèves actuels connaissent la comptine plus loin que ceux de voilà vingt ans, leur réussite dans des activités où le nombre est en jeu ne sont pas meilleures. A propos des compétences prétendument numériques des bébés, G.Vergnaud[8] déclare que ce sont des « billevesées » parce que la « perception par les bébés d'une différence entre deux quantités, voire d'une inégalité, ne peut pas

[8] Site du café pédagogique titre de l’article « Calcul : les billevesées de l'Académie », par G. Vergnaud.

être considérée comme une conceptualisation du nombre. Les travaux sont nombreux qui donnent un âge plus proche de quatre ou cinq ans (dans le meilleur des cas et sous certaines conditions) pour les premières compétences proprement numériques des enfants ». La confusion entre quantité et nombre est fréquente. Revenons donc sur des définitions simples.

Qu'est ce qu'une quantité ?

Deux collections d'objets ont « même quantité » si on peut associer à chaque élément d'une collection un élément de l'autre et réciproquement. Cette activité est généralement appelée la « correspondance terme à terme ». La quantité n'est donc pas la propriété d'un objet comme le serait la couleur, la forme, etc. mais la propriété d'une collection d'objets. Le nombre entier permet de signifier une quantité. Cela suppose que l'on mette l'élève en situation de produire des traces, des schémas qui symbolisent la mémoire d'une quantité.

« La construction du nombre s'appuie sur la notion de quantité » est une déclaration qui nécessite donc quelques précisions. Pour cela, rappelons, en l'adaptant une étude de G Vergnaud[9] : on demande à un enfant de 5 ans de compter les enfants qui se trouvent dans la maison. Il en compte quatre. On lui demande alors de compter les enfants qui se trouvent dans le jardin. Il en compte trois. Combien cela fait-il en tout ? lui demande-t-on. L'enfant se précipite à nouveau dans la maison (un, deux, trois, quatre) puis dans le jardin (cinq, six, sept) et vient annoncer sept. Cet enfant a bien organisé le travail sur les quantités puisqu'il compte-numérote le tout, mais malgré les apparences, il n'a vraisemblablement pas opéré sur les nombres. Plus tard il sera en mesure de prendre les deux informations « 4 » et « 3 » et d'en déduire directement que cela fait « 7 ». Ce sera une nouvelle compétence : il opèrera alors sur les nombres et pas seulement sur les quantités. En effet c'est lorsque l'on observe que l'enfant opère sur des signes et donc les utilise, en acte, et conçoit une addition, en acte, au lieu d'effectuer un recomptage numérotage de deux collections pour en connaître le tout, que l'on peut avancer qu'il utilise une propriété constitutive du nombre, et donc qu'il a travaillé sur les nombres et non plus sur les quantités.

Un autre exemple est celui observable lorsque des élèves doivent conserver la mémoire d'une quantité constituée de deux collections distinctes spatialement. Le

[9] **A QUOI SERT LA DIDACTIQUE ?G.VERGNAUD** SCIENCES HUMAINES - HORS-SÉRIE n° 24 - mars/avril 1999

premier sens que les élèves donnent à un message numérique faisant intervenir deux nombres, c'est de l'associer à une représentation conservant les informations spatiales. Par exemple, ils associent un message « 5 ; 3 » à une collection constituée de 5 objets et de 3 objets. Or, à terme, pour concevoir l'addition, les élèves auront à apprendre que le message « 5 ; 3 » peut être aussi associé à une collection constituée de 6 objets et 2 objets ou de 4 objets et de 4 objets, etc., afin de lier les messages « 5 ; 3 », « 6 ; 2 », « 4 ; 4 », etc. entre eux. Partant de là deux attitudes sont possibles : prescrire en déclarant que l'enfant doit savoir associer ces messages en s'appuyant par exemple sur l'itération de l'unité ou bien construire un dispositif, une situation posant problème (voir supra) et dont la solution est la découverte de l'équivalence des écritures « 5 ; 3 », « 6 ; 2 », « 4 ; 4 ».

En fait les invariants relatifs à l'addition complètent des invariants plus précoces qui sont au cœur du processus de conceptualisation des nombres : l'invariance de la suite des premiers nombres formulés (un, deux, trois, quatre … et non pas un, deux, trois, six…) ; le lien avec l'itération (trois c'est deux plus un, quatre c'est trois plus un …) que l'on peut observer dans cette activité ; l'invariance relative aux stratégies énumératives avec lesquelles on compte les objets (de gauche à droite, du haut vers le bas, telle région de l'espace avant telle autre). Cette équivalence entre couples de nombres, est plus tardive, mais essentielle.

Des pratiques sociales aux situations de classe: un long débat

Reprenons l'exemple d'un enfant appelé à mettre le couvert, chez lui en la simplifiant. Il peut avoir plusieurs stratégies :

- il prend l'assiette pour maman, va la poser ; il prend l'assiette pour papa, va la poser ; etc.~~;~~

- il prend beaucoup d'assiettes et est ainsi assuré d'avoir « ce qu'il faut » ~~;~~

- il prévoit l'assiette pour maman, papa, etc. et va ensuite les poser. Pour cela il peut associer maman à un doigt, papa à un autre doigt, etc. et contrôler la quantité à l'aide de la collection intermédiaire ainsi constituée ; il peut aussi compter maman 1 papa 2...~~.~~ ~~;~~

- il peut enfin dire la quantité nécessaire à l'aide d'un nombre prononcé.

Dans chaque cas, il s'agit de bien contrôler la quantité d'une façon ou d'une autre, que ce soit la correspondance terme à terme (par l'intermédiaire des doigts), ou bien le comptage numérotage, ou bien l'usage du nombre. Se satisfaire de cette situation en la transposant en classe ne permet pas de s’assurer que les élèves ont conçu le nombre comme outil de contrôle d’une quantité puisque des stratégies plus primitives permettent de réussir. En effet, le comptage-numérotage (Pointer les objets et annoncer 1, 2, 3, etc.) est une pratique spontanée issue des pratiques sociales chez le jeune enfant. Sa manifestation (à l’oral ou à l’écrit) ne garantit pas l’acquisition du concept de nombre. Elle ne signifie pas non plus que le concept de nombre n’est pas acquis !

Pour s’assurer d’une construction du nombre il faut étudier cette situation et les variables sur lesquelles tout enseignant·e doit pouvoir jouer afin de faire évoluer les stratégies des élèves. Or la confusion entre une configuration de la situation (variables bloquées) et la situation elle-même (variables sur lesquelles ont jouera), qualifiée de « situation fondamentale » au sens de Brousseau, est fréquente. Il est fréquent de voir cette situation dénaturée et réduite à sa première mise en scène.

Comment alors faire évoluer ce milieu d’apprentissage afin de passer du comptage-numérotage observé au nombre construit~~.~~ ? L’entrée dans le monde des signes comme moyen de mémoriser et d’opérer joue ici un rôle déterminant. En effet, la construction du nombre est celle d’un écrit ayant sa propre autonomie indépendamment du matériel. Le travail de l'enseignant·e va donc consister à élaborer des variantes de la situation dont les modifications successives assureront au mieux la conceptualisation du nombre.

Examinons donc les évolutions utiles pour que la situation spontanée qui vient d’être décrite puisse, à terme, générer le nombre en tant que solution optimale au problème posé. Sur quelles variables jouer pour que l’on soit mieux assuré que les élèves construisent le concept de nombre ?

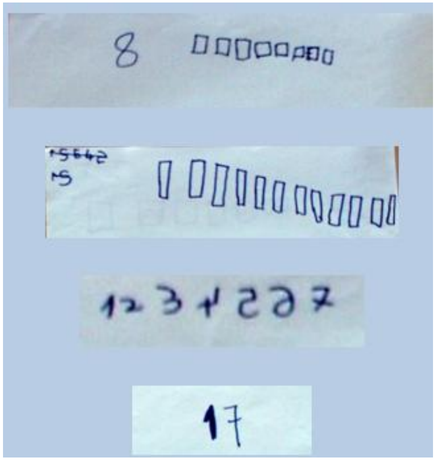
Le comptage numérotage puis le nombre comme moyen de contrôler une quantité[10]

Reprenons cette situation (le couvert ou les œufs) sous un habillage analogue : les élèves en possession d’une collection de voitures doivent aller chercher en un seul

[10] Le lecteur intéressé trouvera dans l’ouvrage de Claire Margolinas et Florence Wosniak « Le nombre à l’école maternelle » De Boeck ed. 2012, une étude très approfondie de cette situation.

déplacement ce qu'il faut de garages (un garage étant matérialisé par un petit rectangle de carton) pour leurs voitures. Les garages sont à disposition à l'autre bout de la classe et donc ne sont pas visibles directement. En posant chaque voiture sur la collection de garages ramenée, les élèves constatent par eux-mêmes s'ils ont réussi ou échoué.

Faisons évoluer la situation en jouant sur la séparation dans le temps de deux étapes de l'activité : l'étape de mise en mémoire de l'information et l'étape de prise des garages. Pour cela, proposons de mémoriser l'information à l'aide d'une trace écrite sans donner d'indication sur la nature de celle-ci. Les enfants hésitent, ne comprennent pas immédiatement cette demande puis progressivement proposent différentes stratégies (dessiner les garages souhaités, faire des tentatives d'écritures de nombres, des schémas, etc.). Ils trouvent petit à petit des moyens écrits de garder en mémoire cette information à l'aide d'une représentation d'une collection ayant la même quantité d'objets (dessin des garages espérés, dessin de bâtons représentant les garages, suite de signes empruntés à ceux des nombres) ou en s'approchant un peu plus d'une désignation indice de la conceptualisation du nombre. Voici un exemple de productions écrites issues de ce type de situation :



C'est dans ces premières productions d'écrits que le concept de nombre peut commencer à prendre consistance. L'élève prend progressivement conscience que la conservation de l'information passe par l'élaboration d'un code qu'il puisse re-lire. En d'autres termes, un concept naît (le nombre, ou plutôt les premiers nombres), on sait qu'il est d'abord fragile (non conservation des quantités à cet âge), mais il se consolide dans un système sémiotique comme solution à certains problèmes posés. Dès lors, une écriture (primitive) va être objet de découvertes, de progrès par confrontation des écrits entre élèves. L'entrée dans l'écrit trouve là une utilité avérée parce que le sens commande les travaux d'écriture. Le travail réflexif sur ces écritures lors de phases de formulation à autrui (le lecteur n'est pas l'écrivain) va développer la construction des premiers nombres.

Plus tard, l'écriture définitive du nombre (ultérieure ou/et contemporaine de l'activité) proposée à l'issue de ces phases de formulation à autrui constituera un code commun auquel on adhérera, pour des raisons sociales, selon des processus qui ont été largement étudiés.

On comprend alors que cette situation des « voitures-garages » contient en elle-même une véritable progression orchestrée par l'enseignant·e et ne se limite pas l'imitation de la mise du couvert en classe.

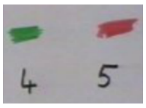
Les mathématiques et les codes écrits comme moyen de mémoriser, de communiquer

Dans ce type de situation nous retrouvons l'éloignement (dans le temps ou dans l'espace) entre le moment où l'élève agit et celui où il constate les effets de son action. Il y a alors place à l'anticipation, à la prévision, à la mise en mémoire et donc aux premières traces écrites organisées. Nous venons de voir que ces écrits d'abord personnels (écrit pour se souvenir) puis destinés à autrui (écrit pour communiquer) constituent donc des milieux au sein desquels naissent les premières conceptions des nombres. Ces premiers écrits ont un statut difficile à interpréter : lorsqu'un enfant « écrit » une suite de bâtonnets ou une suite de signes (qui pour l'adulte sont les nombres) pour mémoriser une quantité a-t-on affaire à une quantité représentée ?~~,~~ A~~a~~ux prémisses du concept de nombre ? Aux deux à la fois ? On ne cherche pas à connaître la signification que cela a chez chaque enfant. On souhaite simplement qu'ils réussissent en s'aidant de leurs écrits. Une observation de déclarations emblématiques telles que « c'est pas la peine d'écrire 1 2 3 4 5, avec 5 ça suffit » permettent de mieux situer l'état des savoirs des élèves. Un travail collectif sur la signification de ces écrits, la lecture d'un écrit par un autre élève contribuent à faire évoluer vers la conception des nombres. Le concept de nombre se construisant en même temps que son écriture.

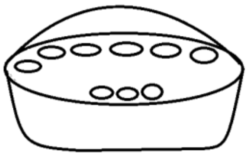
Une situation pour faire concevoir la propriété d'addition.

En nous appuyant à nouveau sur les travaux de G.Vergnaud, étudions maintenant une nouvelle situation qui concerne le schème de l'addition.

Sur une table sont posés des "paniers", sur lesquels sont dessinés des œufs, en nombre variable suivant les paniers. L'élève reçoit une consigne de coloriage sous forme d'un message comme celui-ci : (une tache verte au-dessus du 4 ; une tache rouge au-dessus du 5).



Il doit se procurer « le bon panier », c'est à dire un panier ayant juste ce qu'il faut d'œufs pour qu'il puisse les colorier en suivant la consigne. Quand il pense l'avoir trouvé, il colorie les œufs : il a réussi s'il a bien suivi la consigne et s'il ne reste pas d'œufs non coloriés. Mais pour colorier selon notre exemple (4 œufs en vert et 5 œufs en rouge), l'élève aura dû choisir le seul bon panier possible et qui est dessiné comme ceci :

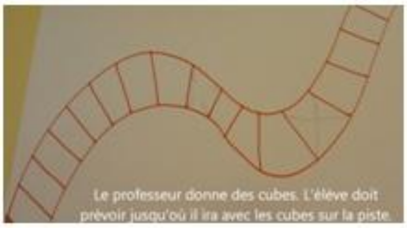


Le but est que l'information « 4 ; 5 » puisse être utilisée face à une organisation spatiale « 6 ; 3 » pour le choix du panier. Ce type d'activité permet de s'initier à une lecture d'un message sur lequel chaque nombre joue un rôle différent (coloriage de couleurs différentes) et à découvrir que la disposition de la collection peut paraître en contradiction avec le message numérique. Ce travail prépare à la lecture d'un mot « 6 ; 3 » dans lequel chacun des signes a un rôle spécifique, ce qui sera bénéfique pour la construction de la numération et de l'addition au cours préparatoire[11].

La construction des premiers nombres pour repérer une position

Nous abordons plus succinctement cette partie. Nous l'avons dit : une autre fonction du nombre est celle du repérage d'une position. Cela nous incite donc à construire une situation a-didactique dont la solution soit le nombre comme moyen de signifier une position. La situation fondamentale est la suivante : chaque enfant dispose d'une piste dessinée sur une feuille de papier. L'enseignant·e distribue à chacun une collection de jetons. Chaque élève doit marquer d'une croix la case où il pense poser son dernier cube lorsqu'il aura placé tous ses cubes sur la piste (un cube par case) depuis le départ. Pour vérifier s'il a bien placé sa croix, il dispose alors les cubes. C'est le travail d'anticipation de la position du dernier cube qui est visé. La manipulation effective des jetons servira lors de la vérification.

[11] GRAND n° 103 pp.41-54 «La propriété d'addition dans la genèse du nombre »



Analysons précisément cette situation. Les jetons sont distribués en vrac. Après avoir mis un jeton sur chaque case puis en inscrivant une croix à l'emplacement du dernier jeton, le jeu lui-même est expliqué.

Comment l'élève fera-t-il la correspondance entre cette collection et la piste (sans placer les jetons sur celle-ci) pour prévoir la case d'arrivée ? Va-t-il les compter ? Autant d'observations possibles que l'enseignant·e pourra conduire et qui l'informeront sur les connaissances que l'élève met en jeu.

Dès que le nombre de cases dépasse la perception globale, le comptage-numérotage constitue la solution optimale à condition que la suite des mots-nombres soit stable et synchrone avec le pointage des jetons. Ici, le comptage-numérotage sert à contrôler une position. Comment modifier maintenant la situation pour que ce soit le nombre lui-même qui entre en jeu ?

Remplaçons les cubes par deux étiquettes nombres. Demandons de marquer la case qui sera atteinte lorsque l'on posera par exemple 5 puis 4 jetons (Le couple étiquette « 5 ; 4 » étant tiré). L'élève doit marquer la 9° case. Une vérification matérielle peut s'organiser ainsi : faire prendre 5 et 4 jetons et vérifier en les plaçant sur la piste. La démarche est semblable à celle que nous avons étudiée à propos du nombre comme mesure d'une quantité.

Jusqu'où aller en maternelle à propos du nombre ?

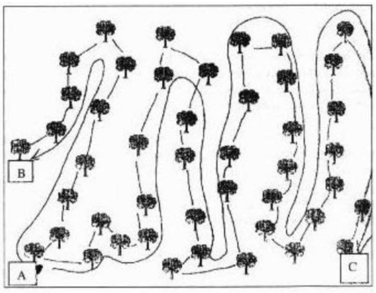
La tendance actuelle à élémentariser l'école maternelle pousse les enseignant·es à faire travailler les élèves trop tôt sur de grands nombres, voire sur la numération. Or la numération suppose un travail très élaboré sur le signe : comprendre que 18 est synonyme de 10 + 8, ne pas se contenter de réciter cette égalité, mais s'en servir dans une action sont des savoirs difficiles à acquérir. On sait que ce travail prend du temps au cours préparatoire. Vouloir engager les enfants dans un tel travail en grande section révèle une ignorance des questions d'ordre sémiotique qui se posent alors.

Peaufiner l'organisation des savoirs pré-numériques, retour sur l'énumération

Nous avons montré en quoi la construction d'un milieu d'apprentissage des premiers nombres nous semblait être la tâche essentielle de l'enseignant·e. Intéressons-nous maintenant aux difficultés que peuvent rencontrer des enfants dans une tâche de dénombrement.

Pour dénombrer convenablement une collection d'objets (déplaçables ou non), l'enfant doit pouvoir « passer en revue » chacun des éléments de la collection sans en oublier, sans en considérer un plusieurs fois. On notera que cette activité est plutôt de nature spatiale. C'est ce que nous appelons une tâche « d'inventaire ». Pour cela, il doit mettre en œuvre une connaissance que nous appelons « énumération[12] [13]» qui est nécessaire au comptage mais qui ne s'identifie pas à celui-ci. Or, des difficultés dans le comptage en cours préparatoire sont parfois imputables à des difficultés à réaliser la tâche d'inventaire.

Voici le travail d'un élève que nous avons observé en cours préparatoire. Il s'agissait de compter le nombre d'éléments de la collection qui lui était présentée sous cette forme. L'élève était invité à écrire sur la feuille s'il le jugeait utile. Il commence en partant de A et dessine le trajet AB, puis il repart de A et dessine le trajet AC. Il dit alors : « je ne sais pas faire le rang ». Il échoue au comptage. Quelle est la nature du problème qui se pose à cet élève ? Ce ne sont pas les connaissances relatives au nombre qui sont en cause. L'enfant échoue alors qu'il dispose de la suite numérique et d'un procédé d'exploration relativement bien organisé (deux chemins). Il s'agit donc d'une absence de connaissance (l'énumération) qui se manifeste par une absence de synchronisation effective entre



[12] BRIAND J., LACAVE-LUCIANI M.-J., HARVOUET M. (2000). *« Enseigner l'énumération en moyenne section ». Grand N. Spécial maternelle : approche du nombre. Tome 1, p. 123-138.*
[13] MARGOLINAS, C., WOZNIAK F., CANIVENC B. *et al.* (2007). *« Les mathématiques à l'école ? Plus complexe qu'il n'y paraît. Le cas de l'énumération de la maternelle… au lycée ». Bulletin de l'APMEP, n° 471..*

une connaissance numérique et une organisation conjointe de la collection et qui empêche l'inventaire de la collection.

Il reste à construire une situation indépendante du comptage dont la solution serait l'énumération. Nous avons vu que l'activité de tri de graines constituait une première activité mettant en jeu l'énumération. Les exemples de situations possibles fondamentales de l'énumération sont nombreux. Citons par exemple celle qui peut être réalisée en salle de jeu. Des pots sont disposés pêle-mêle et retournés dans la salle. Le jeu consiste à placer un caillou sous chaque pot, sans oublier un pot, sans retourner deux fois le même pot. Cette situation organisée dans l'espace de la salle de jeu prépare à de futures activités de marquage pour le comptage : en effet, pour être efficace dans le comptage du nombre d'éléments d'une collection, un enfant a tout intérêt à marquer au fur et à mesure les éléments déjà comptés. Mais ce marquage est la solution au problème posé. La tentation est grande de dire à l'élève qui compte les éléments d'une collection : « marque bien quand tu as déjà compté pour ne pas en oublier », ce qui serait enseigner la solution du problème d'énumération sous jacent…

L'évaluation : une question de formation

Le type de démarche que nous venons de décrire, de façon parcellaire, à l'aide d'exemples, permet une construction progressive de concepts. Chacune des situations proposées prendra du temps de classe. De tels « chantiers » durent plusieurs semaines. S'il convient d'évaluer, c'est d'abord par l'observation que l'évaluation de ce travail collectif, donc de chaque élève, doit se faire. Or observer ce n'est pas regarder. Pour observer il faut bien prendre les indices qui, dans la situation, révèlent le cheminement de chaque élève. Cela permet de proposer des adaptations pour chacun.e en cours de « chantier ». In fine, à un moment, l'enseignant.e sait que tous les élèves ont compris qu'ils avaient appris quelque chose. En quelque sorte l'évaluation se construit à partir des remarques que font les élèves sur leurs réussites-échecs à propos de ce qu'était ce « chantier ». Une telle démarche suppose de la formation. Or « la disparition totale de la réflexion pédagogique dans la formation initiale…permet à la machine-école d'imposer des procédures de plus en plus standardisées au nom de l'obligation de résultats de la loyauté institutionnelle et de la vérité scientifique réunies » [14]. Faire évoluer la situation en fonction des réussites ou des échecs des élèves, s'attendre à des progrès dans l'activité qui suivra grâce aux phases de vérification de l'activité précédente, accepter que des élèves soient passionnés par une activité qui se répète, tout cela suppose de se donner un peu de temps. On comprend bien qu'au-delà de la construction de telles situations, c'est tout le rapport de l'enseignant·e à son métier qui est en cause, donc sa formation.

Faire évoluer des programmes en s'appuyant dessus

Il s'agit maintenant de s'appuyer sur les programmes existants en les protégeant des coups de jugulaires actuels dont les motivations, sous un costume pseudo-scientifique, semblent bien éloignées des préoccupations pédagogiques.

Pour enrichir les programmes actuels, Il faudrait construire plus explicitement les passerelles entre les activités à caractère mathématique (listées dans la partie « découverte du monde ») et celles relatives à l'entrée dans l'écrit (listées dans la partie « découvrir l'écrit »). Nous venons de montrer longuement en quoi l'écrit était un constituant essentiel de l'activité mathématique des élèves de maternelle.

- Nous avons vu que le simple comptage–numérotage appris de façon mécanique peut constituer un obstacle au dénombrement. Il est donc nécessaire de ne pas encourager à l'excès l'acquisition « par cœur » de la suite des nombres jusqu'à 20 ou 30 mais plutôt de proposer de véritables situations de dénombrement.

- Un enrichissement des programmes consisterait aussi à mieux expliciter ce qu'est le « symbolisme » en mathématiques. L'idée que le symbolisme se résumerait à l'utilisation des signes opératoires + - x = « déjà là » fait obstacle à une réflexion sur la construction de premiers écrits mathématiques des élèves. Or entrer dans l'écrit c'est symboliser.

[14] Meirieu « La riposte » P.142 ed. Autrement.