ELABORATION ET LECTURE DE LISTES
Construction de situations d'enseignement dans le domaine logique

Martine Loubet
Ecole maternelle Jules Michelet
Marie-Hélène Salin
IUFM d'Aquitaine et IREM d'Aquitaine

I. INTRODUCTION

A/ La diversité des situations d'apprentissage pré-mathématique à l'école maternelle

L'enseignant d'école maternelle dispose d'une panoplie de situations au cours desquelles les élèves peuvent réaliser des apprentissages mathématiques, situations que l'on a coutume de classer en diverses catégories, selon leur type d'insertion dans la vie de la classe.

* situations fonctionnelles : celles dans lesquelles l'enseignant propose à certains élèves, à tour de rôle, la prise en charge des aspects mathématiques d'une situation liée au fonctionnement général de la classe ou au fonctionnement d'une autre activité (ex : l'appel, la distribution de matériels, la préparation des jeux de société etc.).
* ateliers de jeux de société, de construction etc.
* situations d'enseignement, construites par l'enseignant pour permettre à ses élèves de s'approprier telle ou telle connaissance.

Dans la plupart de celles-ci, on peut dire que l'apprentissage se fait par « frayage » ou familiarisation : l'élève comprend le problème et fait comme le lui montre ou le lui explique quelqu'un de plus avancé, l'enseignant ou un autre élève.
Nous allons présenter ici une autre catégorie de situations d'enseignement, qui visent le développement des capacités de raisonnement des élèves et la construction des outils cognitifs de base que constituent les systèmes de désignation et de représentation de collections d'objets, non structurées ou structurées de diverses manières.
La différence entre les apprentissages par « frayage » et ceux provoqués par les situations que nous allons exposer ne porte pas sur les productions finales des élèves : une liste est toujours une liste, la représentation d'une collection ordonnée est toujours un dessin où sont représentés les objets dans un certain ordre, cette différence porte sur la façon dont les élèves sont conduits à produire ces représentations dans un processus où « la connaissance visée n'est pas directement enseignée par le maître mais peut progressivement apparaître chez l'élève à partir de multiples remaniements des stratégies utilisées, ceci étant le résultat des confrontations avec un certain type d'obstacles rencontrés au cours de l'activité ». Ce type de processus caractérise les situations d'apprentissage par adaptation, telles qu'elles ont été théorisées et formulées par G. Brousseau[1] dans *la théorie des situations didactiques*.

B/ La démarche générale pour construire une situation d'apprentissage par adaptation

La démarche de *la théorie des situations* consiste à se poser la question, dans un premier temps indépendamment de l'existence d'élèves : « de quels problèmes la connaissance visée

[1] Les textes principaux de G. Brousseau sont rassemblés dans le volume « La théorie des situations didactiques » publié par La Pensée Sauvage (Grenoble) en 1998

est-elle le meilleur outil de résolution ? » ou « dans quelles situations est-elle nécessairement mobilisée ? » et d'une certaine manière à « représenter » cette connaissance par ces situations, que l'on peut qualifier de *non didactiques* : elles sont spécifiques du savoir, mais sans comporter d'intention d'enseigner.
La deuxième étape consiste à rechercher comment transformer l'un de ces problèmes pour en faire le noyau d'une situation didactique, adaptée à l'âge, aux connaissances et aux intérêts des élèves concernés.

C/ Les caractéristiques générales des situations didactiques ainsi construites

1) Elles s'inscrivent dans un *projet* du maître de faire approprier un savoir spécifié.
2) Elles sont construites autour de *situations a-didactiques* (qui simulent une des situations non didactiques) dont la résolution suppose le recours à la connaissance visée.
3) L'enseignant doit donc dans un premier temps faire la *dévolution* à l'élève de la responsabilité de résoudre le problème.
4) La situation doit être organisée de telle manière que les *actions* des élèves soient *validables* par la situation ou par eux-mêmes, et qu'ils puissent faire plusieurs tentatives en tenant compte des informations apportées par les rétroactions de la situation.
5) En cours ou au terme du déroulement de la situation a-didactique, l'enseignant est responsable de *l'institutionnalisation* des connaissances élaborées par les élèves.

II. L'ELABORATION ET LA LECTURE DE LISTES : QUEL APPORT A LA CONSTRUCTION DE LA PENSEE LOGIQUE ?

Constituer une collection à partir d'une liste, inventer la liste comme moyen de se rappeler une collection ou d'en communiquer le contenu, en fabriquer, fabriquer des symboles pour désigner des objets et pouvoir fabriquer une liste, sont autant d'activités favorables au développement de la pensée logique des élèves d'école maternelle. C'est tout au moins la certitude que nous avons acquise dans les recherches menées au Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, (COREM), longtemps animées par J. Peres, et auxquelles ont participé les enseignants successifs de l'école maternelle Jules Michelet, que nous ne pouvons nommer tous ici[2].

Une liste constitue le mode de désignation le plus simple de collections d'objets non structurées. C'est un outil rencontré tout le temps dans la vie courante et en mathématiques. Dans la vie courante, une liste permet de mettre en mémoire des informations, de les traiter et d'agir sur des tenant-lieu permettant des anticipations.

A/ Le témoignage des ethno-linguistes.

Dans notre culture, l'usage de listes est si ordinaire que nous le croyons naturel. Or les travaux de chercheurs comme Goody[3] par exemple, montrent que la liste (dans les civilisations anciennes) est « une forme caractéristique des premiers usages de l'écriture; l'importance prise par ces listes est l'effet en partie des besoins d'une économie et d'une organisation étatique complexes, en partie des méthodes de formation des scribes, en partie aussi d'une sorte de jeu intellectuel : on essaie d'explorer les possibilités qu'offre ce nouveau moyen de

[2] Ces recherches ont été présentées de manière succincte dans *« Le jeu des partitions en maternelle », Gransd N n°47 (90-91)*
[3] GOODY J. (1979) *La raison graphique* Editions de Minuit

communication. Une activité comme la mise en liste, difficilement envisageable dans les cultures orales, est de celles qui ont favorisé le développement de l'histoire et des sciences d'observation ainsi que, à un niveau plus général la recherche et la définition de schémas classificatoires ».

B. Rey[4]*, dans la dernière partie de son livre *« Les compétences transversales en question »*, s'appuie sur les conclusions de Goody dans la perspective de proposer des pistes d'action pour le développement d'intentions transversales pour l'école. Il écrit : « la parole pour et dans l'action peut s'accommoder de catégorie à l'extension indécise et aux contours flous. C'est la pratique de la liste qui donne à voir l'idée même de catégorie. C'est la liste encore, dit Goody, qui « relève de ce processus plus général qu'on appelle la planification de l'action », car planifier c'est construire la liste des actes à accomplir. On voit donc l'intérêt cognitif d'une saisie du monde par des listes ».

B/ Constituer l'idée de liste, pas si facile à 3 ans!

Nous allons décrire une situation destinée à des élèves de petite section. Son objet peut être assimilé à l'élaboration et à l'utilisation d'une liste parce qu'il s'agit pour les élèves de constituer une collection d'objets équivalentes à la sous-collection donnée par la maîtresse des photos de ces objets. Ce jeu est précédé d'une situation collective, commune à toutes les activités dont nous parlons : la constitution d'une collection d'objets hétéroclites.

1) Constitution d'une collection : « la valise de Toutou ».

Matériel :

20 objets hétéroclites, une valise.

Objectifs pour le maître :

- constituer un patrimoine commun utilisable dans plusieurs situations
- donner une cohésion au groupe classe
- mémoriser collectivement une collection.

Objectifs pour les élèves :

- entrer et respecter la règle du jeu, c'est à dire savoir nommer parfaitement les objets, parler à son tour, citer un objet et un seul, ne pas souffler
- apprendre à prononcer correctement les noms des objets
- prendre la parole dans un grand groupe
- apprendre à tenir compte des objets déjà sortis, ce qui n'est pas évident pour les petits. Ceci suppose que se construit chez eux, peu à peu, une représentation mentale des objets de la collection.

Déroulement :

Il s'agit de reproduire « le jeu de la boîte vidée »[5] en l'adaptant à la classe des petits. Les élèves sont rassemblés sur les bancs. Comme tous les matins, la maîtresse va chercher la marionnette Toutou. Ce matin-là, Toutou arrive en portant une valise dans laquelle il y a 3 objets. Les élèves les regardent et apprennent à les nommer. Puis les objets circulent parmi les enfants qui les touchent et les nomment chacun à leur tour. Lorsque tous les élèves ont touché et nommé les trois objets, la maîtresse les range dans la valise. C'est alors que Toutou annonce que demain, il reviendra avec la valise et que si les enfants se souviennent de tout ce qu'il y a dedans, il donnera un autre objet. La valise est fermée et rangée dans le placard avec Toutou.

[4] REY B (1996) *Les compétences transversales en question* ESF

[5] Voir : « Construction et utilisation d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle »

Le lendemain, les élèves enthousiastes, attendent la venue de Toutou et de sa valise. Lorsqu'il arrive, la maîtresse doit être très vigilante à ce que les objets ne soient pas nommés avant que le jeu ne commence. A l'aide d'une comptine, la maîtresse interroge les enfants. Celui qui est désigné par le sort, doit nommer un des objets cachés dans la valise. La maîtresse le sort et le pose sur le tapis. Le jeu se poursuit ainsi jusqu'au moment où tous les élèves sont d'accord pour dire qu'il n'y a plus rien dans la valise. C'est alors que la maîtresse l'ouvre et la retourne. S'il tombe quelque chose de la valise, c'est perdu, s'il ne tombe rien : c'est gagné, et Toutou donne un nouvel objet qui est touché, nommé etc.
Cette situation permet la constitution d'une collection de 20 objets. Elle nécessite une vingtaine de séances qui se déroulent sur deux mois.

2) « Le jeu des photos ».
Matériel :
Les objets de la valise de Toutou et leurs photos.
Introduction des photos : Avant de poser le problème, le maître s'assure que les élèves reconnaissent, sans ambiguïté, les objets photographiés. Toutou arrive avec sa valise et les 20 photos des objets de la valise. Les objets sont sortis et étalés sur le tapis. La maîtresse distribue une photo par élève, chacun doit aller chercher l'objet dont il a la photo. Tous les élèves réussissent et la maîtresse annonce que le lendemain, Toutou reviendra avec la valise et les photos pour un nouveau jeu.
Description de la situation :
L'activité se déroule au cours d'un moment collectif. Tous les élèves jouent d'abord avec une sous-collection de 4 photos, pendant un certain nombre de séances, puis ils jouent avec une sous-collection de 7 objets, ce qui, comme nous le verrons pose des problèmes supplémentaires.
1er jour : Toutou arrive avec la valise. La maîtresse dépose la valise contenant les objets, ouverte, sur une table à l'écart du groupe, donne à un enfant un paquet de photos, lui demande d'aller chercher les objets photographiés et de les ramener dans un petit panier en un seul voyage.
Consigne :
« J'ai posé la valise sur la table, là-bas. Elle est ouverte avec tous les objets dedans. Je vais donner plusieurs photos à X, il devra apporter dans ce panier les objets qui sont sur les photos que je lui ai données. Il devra rapporter tous les objets en une seule fois ».
Déroulement des séances suivantes :
Elles se déroulent toutes comme la première. La maîtresse dit la consigne au début de chaque séance et la redit en particulier à chaque joueur, sans modification, n'ajoutant aucun conseil qui faciliterait une réussite à court terme au détriment de stratégies construites par les élèves.

Stratégies observées :
Au fur et à mesure du déroulement des séances, certains enfants élaborent et tentent de formuler les stratégies gagnantes (« j'ai regardé les photos, autrement j'allais perdre ») d'autres donnent des conseils aux joueurs et beaucoup attendent la validation pour manifester bruyamment leur joie lors d'une réussite ou argumenter en cas d'échec (« Pourquoi il a ramené le yoyo ? »).
- Stratégies perdantes :
S1 : Laisser les photos au fond du panier (ou les poser sur la table) et prendre éventuellement l'objet de la photo visible sur le dessus de la pile
S2 : Conserver les photos en pile mais tenter de repérer un autre objet que celui de la première photo en entrouvrant le paquet de photos

S3 : Avec 7 photos, les laisser dans le panier en les passant furtivement en revue. Il manque un ou plusieurs objets.
- Stratégies gagnantes qui permettent de construire l'ensemble des couples photo/objet :
S4 : Prendre une photo et l'objet et mettre le tout dans le panier et ainsi de suite. L'élève étale les photos, pose les objets sur chaque photo et porte ces couples dans le panier en essayant de les empiler. Il constitue une nouvelle collection de couples.
S5 : Etaler les photos, poser les objets sur chaque photo et mettre les objets dans le panier puis rempiler les photos. L'élève constitue deux collections.
S6 : Etaler les photos et par contrôle du regard, constituer la collection d'objets. Cette stratégie est la plus répandue en fin d'apprentissage mais elle n'est pas sans risque surtout lorsque l'élève joue avec 7 photos.

Validation : Elle se fait devant le groupe. Le joueur revient avec les photos qu'il a reçues et les objets qu'il ramène. Aidé du groupe, la maîtresse étale les photos sur le tapis, prend les objets du panier, un par un, en cherchant la photo correspondante pour le poser dessus. La réussite ou l'échec est alors visible sans équivoque par tous.
Au fur et à mesure du déroulement des séances, les élèves anticipent de plus en plus le résultat en voyant ce qui est rapporté alors qu'au début, il faut attendre que les objets aient été posés sur les photos pour que les élèves se hasardent à conclure.

Nous jouons avec 4 photos, puis avec 7 photos, quand la plupart des élèves ont réussi. En outre, pour les élèves encore en difficulté après plusieurs séances, la maîtresse intervient soit pour recentrer l'élève sur la question posée, soit pour lui montrer toutes les photos. Pour ceux qui ne réussissent pas du tout, un travail de correspondance terme à terme est proposé avec 4 photos et les 4 objets correspondants, il s'agit de les poser sur les photos.
Une vingtaine de séances sont conduites, 5 ou 6 enfants maximum jouent devant les autres au cours d'une même séance.

3) Une hypothèse pour expliquer le comportement des élèves qui ne réussissent pas : le primat des affirmations

Il faut bien sûr différencier les comportements de ceux qui rapportent tous les objets, de ceux qui en rapportent quelques-uns etc. Tous ont compris qu'ils devaient rapporter des objets dans le panier. Mais, selon nous, l'ensemble de ces comportements attestent que ces élèves ne conçoivent pas le paquet de photos comme une liste, c'est-à-dire un moyen qu'a l'enseignante de leur faire savoir quels objets ils doivent rapporter et quels objets ils ne doivent pas rapporter.

Les caractéristiques de la pensée enfantine préopératoire peuvent nous aider à comprendre les difficultés qu'ils rencontrent pour ce faire. Les travaux de l'école piagétienne ont mis en évidence les caractéristiques de leurs démarches spontanées :
- ils se centrent sur les affirmations et les caractères positifs des objets (primat des affirmations), les négations sont négligées ou ne sont construites que secondairement et laborieusement.
- leurs actions sont centrées sur le but à atteindre
- il y a retard de la prise de conscience conceptualisatrice sur la réussite pratique.

Selon Perès (1988) [6], « ce primat des affirmations est facile à comprendre, il relève de la nature de notre rapport au monde : nous avons une relation spontanée à ce qui est donné alors que la négation relève de constatations dérivées (par exemple anticipations) ou de constructions... Sur le plan des conceptualisations, les démarches primaires de la pensée consistent en constatations et non en inférences, en justifications et non en mise en doute. Les jugements portant sur l'existence de ce qui n'est pas donné tels l'absence, la différence, l'opposition, ne peuvent être construits qu'après coup puisqu'ils supposent des prévisions démenties, des attentes déçues etc. » Ce primat des affirmations dans les activités cognitives du sujet explique les comportements prélogiques ou semi-logiques.
Dans le cas du « jeu des photos », pour constituer la collection d'objets, l'élève doit :
- décoller du but à atteindre : rapporter des objets dans le panier
- explorer la collection de photos et pour cela, puisque l'enseignante la lui donne en paquet, aller au-delà de l'information visible, celle donnée par la première photo, et donc étaler la collection de photos ou la parcourir de manière systématique.
- trier les objets suivant le critère : « cet objet appartient à la collection de photos, cet objet ne lui appartient pas » et, dans ce dernier cas, il doit décider de ne pas prendre l'objet. Or, c'est ce que ne peuvent pas faire un certain nombre d'enfants les premières fois où ils jouent; tellement semble forte la prégnance du but.
En revanche, la validation qui consiste à poser les objets du panier sur les photos, ne pose pas les mêmes problèmes car photos et objets sont présents, et la constitution de la collection n'est pas à la charge des élèves. Aussi, des élèves qui ne réussissent pas encore sont capables de prévoir que leur copain s'est trompé, par exemple parce qu'il n'a a pas regardé les photos !
Un autre problème logique est posé par la validation : certains enfants ont du mal à accepter d'avoir perdu si la collection rapportée contient la collection correspondant à celle des photos. Il faut concevoir que certains objets ne devraient pas être là. Peu à peu, sous l'effet des rétroactions de la situation et des remarques faites par les enfants spontanément ou sur sollicitation de la maîtresse, tous les élèves deviennent capables de réussir, c'est-à-dire ici, de transformer le moyen de validation en méthode pour résoudre le problème.

Le rôle de l'enseignante est fondamental dans l'accompagnement des enfants. Si à aucun moment elle ne leur fournit la solution, elle formule de nouveau la consigne, permet l'expression de tous les spectateurs, aide à la formulation des résultats de la validation.
Nous n'exposerons pas ici comment on peut expliquer les effets de cette situation, nous renvoyons aux travaux de J. Pérès qui montre comment la théorie piagétienne de l'équilibration peut rendre compte de l'évolution des comportements comme un lent processus d'autorégulation, au cours duquel les conflits entre un schème habituel et une situation nouvelle jouent un rôle moteur.

C/ Eprouver le besoin de faire une liste, construire les éléments nécessaires à sa fabrication

Conformément au programme décrit plus haut, il est nécessaire de nous interroger sur les situations non didactiques nécessitant l'usage d'une liste d'objets. Du point de vue des situations non didactiques associées au concept de liste, « le jeu des photos » est une situation pauvre puisqu'elle n'est pas située dans un contexte qui donne du sens à l'utilisation de la liste.

1) La situation fondamentale de l'élaboration d'une liste

[6] PERES J (1988) Les activités logiques à l'école maternelle. Actes de l'Université d'été : Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'Ecole élémentaire;

Deux exemples simples :
- Le directeur de l'école a inscrit les élèves. Le jour de la rentrée, il communique la liste de leurs élèves à chaque enseignant.
- Le professeur de l'IUFM recueille la liste des élèves qui veulent des annales du concours PE (il ne se contente pas de compter).

Une formalisation générale :
Une personne X dispose d'une collection d'objets a, dont elle extrait une sous-collection b. Elle doit envoyer des informations à une personne Y pour que celle-ci puisse reconstituer, à partir de la collection a, la collection b.
ou
Une seule personne X, a constitué une collection b à un moment t1, la collection a été dispersée, elle doit la reconstituer à un moment t2.

2) Comment mettre en scène ces situations dans une classe d'école maternelle ?
Il est nécessaire de tenir compte de plusieurs types de contraintes :

* des conditions didactiques précises :
- concevoir des situations avec des rétroactions
- offrir la possibilité de faire plusieurs tentatives pour permettre une évolution des comportements
- présenter les tentatives comme des essais non aboutis et non comme des échecs
- favoriser les échanges entre les élèves, informels ou organisés par l'enseignant.

* des contraintes liées à l'âge des élèves :
- cacher des objets d'une collection considérée comme le Trésor de la classe est un enjeu qui intéresse suffisamment les élèves de cet âge
- mettre en place une organisation telle que chacun soit personnellement concerné.

Plusieurs situations d'enseignement dans le domaine de la logique ont été construites à partir d'une idée-force : « prévoir ce qui est caché dans la boite ». Toutes les situations que nous allons décrire demandent la constitution d'une collection d'objets constituée au cours d'une phase collective : « le jeu de la boîte vidée », semblable à celle décrite pour la constitution de « la valise de Toutou ». Selon la classe, les objets de la collection sont différents, (nous verrons plus loin pourquoi) et le contenant également. Il s'agit d'une valise en petite section, d'un sac en moyenne section et d'une boite en grande section.

3) « Le jeu des listes »
Ce jeu utilise donc une collection d'objets.
Il se déroule sur 2 jours.
Le premier jour, la maîtresse prend devant les enfants quelques objets de la boîte aux trésors, qu'elle place dans une autre boîte. Chacun peut les voir, les toucher. Puis la boîte est fermée, rangée et personne ne peut plus y toucher.
Le lendemain, chaque enfant est appelé par l'enseignante pour venir jouer : S'il nomme tous les objets contenus dans la boîte, il a gagné. Sinon il a perdu. Au fur et à mesure qu'il nomme un objet de la boîte, la maîtresse le sort et le lui montre. S'il reste des objets quand l'élève pense les avoir tous énumérés, la maîtresse les lui montre aussi.

a) Une première variable didactique du jeu des listes : la taille des collections cachées
Quand le nombre des objets cachés est petit, les élèves peuvent réussir grâce à la mémoire. En revanche, quand ce nombre est grand, la mémoire ne permet plus de réussir, seule une liste le permettrait. C'est cette expérience que vivent, pour la première fois, les élèves de moyenne ou grande section, au cours du « jeu des listes». Dans un premier temps, le maître cache un petit

nombre d'objets (2 ou 3), puis brusquement, il porte ce nombre à 7 ou 10. Les élèves essaient de mémoriser les noms des objets cachés. Le lendemain, tous perdent ! Même s'ils se rendent compte de la défaillance de leur mémoire, ils pensent, dans un premier temps, qu'il suffit de mieux regarder ou de s'appliquer davantage. Peu à peu, ils pensent qu'il faut trouver une autre idée pour réussir : l'idée de liste est en route.
Malgré cette expérience, même en grande section, dans d'autres situations où le scénario est le même, l'idée de la liste n'arrive pas lors de la séance au cours de laquelle le maître augmente le nombre d'objets cachés, elle apparaît seulement plus vite.

b) Une deuxième variable : la fabrication d'une liste (invention de quelques élèves, diffusion dans la classe et rôle du maître)
Les élèves sont réunis autour du maître qui s'apprête à cacher de nouveaux objets. Ils font part de leurs échecs qu'ils imputent à la mémoire défaillante. Le rôle de l'enseignant est, à ce moment-là très important. Les élèves ne doivent pas se décourager, le maître rappelle que s'il propose ce jeu, c'est qu'ils doivent trouver un moyen de réussir, que, peut-être, leur stratégie n'est pas la bonne.
Certains disent qu'ils vont demander, chez eux, à leur maman, d'écrire le nom des objets ou qu'ils vont essayer de les écrire sur un papier. Le maître intervient alors en disant qu'à l'école aussi ils peuvent essayer, qu'il y a tout ce qu'il faut et qu'au moment des ateliers, ils pourront prendre une feuille et un stylo. Quelques uns le font. Les élèves fabriquent des symboles personnels des objets sous forme de dessins.
Le maître n'intervient ni sur la fabrication, ni sur l'utilisation de la liste. La propagation de l'idée de liste n'est pas immédiate car, au début, la réussite n'est pas toujours là pour valider le fait que c'est le meilleur moyen pour gagner, les premières listes étant fausses ou incomplètes.
En moyenne section, les capacités graphiques sont encore limitées. Pour « les boîtes de couleurs »[7], lors de la phase de constitution de la collection, à chaque nouvel objet introduit, le maître colle le dessin de l'objet sur un panneau ou sur le cahier de la classe, c'est l'étiquette de l'objet. Le maître propose aux élèves de les utiliser pour faire leur papier.
Les apprentissages de nature logico-mathématique concernent la mise en correspondance terme à terme entre les objets et leur désignation, et les processus d'élaboration de désignations des objets qui permettent de les reconnaître à la lecture. Les résultats relatifs à cet aspect dépendent de la valeur d'une troisième variable.

c) Une troisième variable : la composition de la collection (quand les élèves ont à fabriquer la désignation des objets)
La collection est composée par le maître en fonction des activités qu'il sait qu'il proposera aux élèves en cours d'année.
En petite section, la collection réunit à la fois des objets (faciles à photographier et à reconnaître sur des photos) pour l'activité décrite plus haut, « le jeu des photos », et des petits animaux qui sont utilisés pour une autre activité, « la moufle », voir Grand N n° 60.
En moyenne section, la collection réunit des objets faciles à dessiner et à reconnaître en auto-communication.
En grande section, la collection est composée selon ce même critère si l'enseignant propose par exemple « le jeu des listes » puis « le jeu de l'ordre », ou avec d'autres critères bien définis pour « le jeu du Trésor » pour lequel l'objectif principal est l'élaboration d'un code commun rendu nécessaire par une phase de communication des listes entre les élèves. En effet, si tous

[7] Voir la description dans la partie III

les objets sont très différents les uns des autres, il n'est pas nécessaire de se mettre d'accord, il n'y a pas de confusion possible. C'est pourquoi, pour le jeu du Trésor, la collection est composée de la manière suivante : 11 billes, 6 boîtes rectangulaires, 6 objets longs, 7 objets ronds, 2 véhicules, 1 grenouille et 1 bonhomme.
Pour les élèves, confrontés à la lecture des désignations d'autres élèves, il faudra se mettre d'accord. Quelques objets (la grenouille, le bonhomme) ont peu de ressemblance avec d'autres, l'ajout de traits distinctifs, propres à un seul des objets, permet de les représenter et de les reconnaître facilement Pour d'autres, au cours de débats, organisés par le maître, les élèves retiennent des traits oppositifs (le tube de crème a des rayures sur le bouchon, le tube de dentifrice n'en n'a pas), et pour d'autres encore (les 11 billes), les traits oppositifs sont inopérants, ils doivent choisir des signes arbitraires.
Cette démarche est décrite et commentée de manière très détaillée dans un document : [8], publié à l'IREM de Bordeaux. L'évolution des comportements quant à la mise en correspondance (un dessin par objet) y est présentée, ainsi que celle des comportements des élèves quant à l'aspect sémiologique.

III. D'AUTRES SITUATIONS D'ELABORATION DE LISTES

Ces situations portent sur des dispositifs matériels mettant en relation de diverses manières des boites et les objets du trésor. Pour nous adultes, il est « évident » que la résolution des problèmes qui sont posés aux élèves à partir de ces dispositifs passe par la représentation de la structuration de la collection. Par exemple, si la collection est répartie entre plusieurs boites identiques, par la représentation de cette partition, sous des formes qui peuvent être différentes. Or, pour les enfants de l'école maternelle, relier la solution du problème qui leur est posé à la représentation graphique du dispositif, est une conquête qui se réalise peu à peu, au cours des séances successives, grâce aux rétroactions de la situation et aux interactions entre élèves, organisées par l'enseignant. L'établissement de ce lien et la réalisation de représentations pertinentes constituent les objectifs communs aux situations didactiques décrites.

A/ « Les boîtes de couleur »[9]

Cette activité est proposée aux élèves de sections de moyens ou « petits-moyens ». Elle remplace alors le jeu des listes

Matériel :
- la collection de 20 objets (constituée au cours du jeu du sac vidé)
- 4 boîtes de couleurs différentes

Déroulement :
Une séance se déroule sur deux jours ; le premier jour les objets sont cachés, le deuxième jour les enfants sont interrogés.
1er jour
Au cours d'une discussion d'environ 15 minutes, la maîtresse annonce aux enfants regroupés sur les bancs un nouveau jeu. Elle présente le matériel nécessaire :
- la collection d'objets connue des enfants comme « le Trésor ».

[8] *« Construction et utilisation d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle »*, IREM de Bordeaux 40 rue Lamartine 33400 Talence
[9] Un compte-rendu de recherche sur la première réalisation de cette activité est diffusé par l'IREM de Bordeaux sous le nom : « *le jeu « qu'est-ce qui est caché dans les boites de couleur ? »*

- des boîtes de couleurs différentes, chaque boîte est montrée et nommée (la boîte bleue, la boîte rouge...)

Consigne :

La maîtresse annonce ce qu'elle va faire : « Je vais cacher un objet dans chaque boîte » et ce qu'elle demandera le lendemain : « Demain, les boîtes seront fermées et je vous demanderai quel objet est caché dans la boîte noire ou bien quel objet est caché dans la boîte rouge... »

La maîtresse annonce que les boîtes vont rester ouvertes, toute la journée, pour qu'ils puissent se préparer pour gagner. Elle précise que chaque enfant viendra ensuite jouer tout seul et qu'à ce moment-là, les boîtes seront fermées.

La maîtresse met alors un objet dans chaque boîte, les élèves regardent et nomment les objets. Les quatre boîtes sont posées sur une table.

2ème jour

Le lendemain, la maîtresse est installée à l'écart, les quatre boîtes fermées devant elle. Elle appelle les élèves les uns après les autres et demande : « Qu'y a-t-il dans la boîte rose ? » (par exemple). L'élève nomme un objet. Chaque élève est appelé mais il peut refuser, dire qu'il ne sait pas ou qu'il ne se souvient plus.

Pour la validation de sa réponse, l'élève ouvre la boîte et vérifie ainsi s'il a gagné ou perdu.

Suite du déroulement :

Il est peu probable qu'un élève pense à ce moment à faire une liste. Certains vont venir au cours de la journée voir le contenu des boîtes pour essayer de le mémoriser. Pour répondre, ils vont faire appel à leur mémoire. Les réussites sont nombreuses au premier jeu puis les objets se mélangent dans leur tête et ils perdent.

Au début de la 4ème séance, la maîtresse organise **un débat** dont le point de départ est l'échec, souvent massif au dernier jeu. Elle pose le problème et rappelle que, si elle propose ce jeu, c'est qu'il existe un ou des moyens de gagner à tous les coups.

Solutions proposées par les enfants :

- certains sont démunis
- d'autres disent qu'ils vont réfléchir davantage, ils s'accrochent à la mémoire ou à une certaine idée de s'appliquer encore plus
- d'autres encore disent qu'il faudrait les écrire sur un papier ou qu'il vont les écrire chez eux, dans ce cas, la maîtresse propose d'essayer de les dessiner puisqu'ils ne savent pas encore écrire
- si aucune autre idée n'apparaît, la maîtresse rappelle que des étiquettes représentant les objets ont été collées dans le journal de la classe et qu'elles pourraient peut-être servir pour ce jeu.

Le débat débouche sur l'idée de faire un « papier » pour gagner.

Comme pour les séances précédentes, la maîtresse cache un objet dans les quatre boîtes. Elle indique qu'ils peuvent prendre ce dont ils ont besoin pour faire leur liste. Elle précise que, pendant les ateliers, il est permis d'interrompre son travail pour aller fabriquer sa liste. Le lendemain, l'interrogation se déroule également comme précédemment. Les élèves qui ont fabriqué une liste pensent (ou non) à la prendre et l'utilisent (ou non).

Remarques :

- les élèves sont volontaires pour fabriquer une liste et sont autonomes pour s'en servir lorsque la maîtresse les appelle pour jouer.
- les premières listes sont justes rapidement pour les objets (c'est à dire que dès la deuxième liste, seuls les quatre étiquettes des objets sont collées) mais ne comportent aucun signe concernant les boîtes; les enfants ont donc toutes les chances de perdre. Si c'est le cas, pour ne

pas les décourager, la maîtresse montre que l'objet cité se trouve bien dans une autre boîte, ce qui permet de pointer, sans le dire, que la liste, telle qu'elle est, ne suffit pas.

Au début de la 7ème séance, la maîtresse organise **un second débat** dont le point de départ est l'échec au jeu, qui reste massif malgré la liste. Elle pose le problème et rappelle que, si elle propose ce jeu, c'est qu'il existe un ou des moyens de gagner à tous les coups. « Est-ce que la liste permet de gagner à tous les coups ? » La réponse obtenue en général est : « Non, on ne voit pas sur les listes la couleur des boîtes. »
Solutions proposées par les enfants :
- certains sont démunis
- d'autres disent qu'ils vont réfléchir davantage, ils s'accrochent à la mémoire ou à une certaine idée de « s'appliquer encore plus »
- d'autres demandent si on peut faire les boîtes avec des feutres ou des papiers de couleurs.
- si aucune proposition n'apparaît, la maîtresse propose elle-même l'idée de faire les boîtes mais sans préciser comment.

Le débat débouche donc sur l'idée de représenter les boîtes pour gagner.
Caractères des premières listes :
- les couleurs choisies ne sont pas toujours les couleurs des boîtes
- les couleurs sont utilisées pour colorier les objets tels qu'ils sont
- les bonnes couleurs ne sont pas associées aux boites
- les étiquettes recouvrent les couleurs et la liste n'est plus utilisable au moment de la lecture.

Peu à peu, la plupart des élèves progressent dans leur maîtrise de la couleur pour différencier les boites et un grand nombre se mettent à gagner.

B/ « Le jeu des partitions »

Destiné aux classes de moyens après « les boîtes de couleurs » ou de grands après « le jeu des listes ».
Matériel :
- la collection de 20 objets (cf. jeu de la boîte vidée)
- 4 boîtes identiques

Déroulement :
Une séance se déroule sur deux jours ; le premier jour les objets sont cachés, le deuxième jour les enfants sont interrogés.
1er jour
Au cours d'une discussion d'environ 15 minutes, la maîtresse annonce aux enfants regroupés sur les bancs un nouveau jeu. Elle présente le matériel nécessaire : la collection d'objets connue des enfants comme le Trésor et les 4 boites.
Consigne :
La maîtresse annonce ce qu'elle va faire : « Je vais cacher trois objets dans chaque boîte » et ce qu'elle demandera le lendemain : « Demain, les boîtes seront fermées, je sortirai un objet d'une boîte et je vous demanderai quels objets sont cachés, avec lui, dans la boîte.»
La maîtresse annonce que les boîtes vont rester ouvertes, toute la journée, pour qu'ils puissent se préparer pour gagner. Elle précise que chaque enfant viendra jouer tout seul et qu'à ce moment-là, les boîtes seront fermées.
La maîtresse met alors trois objets dans chaque boîte, les élèves regardent et nomment les objets. Les quatre boîtes sont posées sur une table.
2ème jour

Le lendemain, la maîtresse est installée à l'écart, les quatre boîtes fermées devant elle. Elle appelle les élèves les uns après les autres et demande : « Qu'y a-t-il dans la boîte avec le playmobil (par exemple)? ». L'élève nomme deux objets. Chaque élève est appelé mais il peut refuser, dire qu'il ne sait pas ou qu'il ne se souvient plus.
Validation : L'élève ouvre la boîte et vérifie ainsi si sa réponse est correcte ou non, s'il a gagné ou perdu.

Déroulement ultérieur
Quand ce jeu succède au jeu « les boîtes de couleurs », des élèves demandent, alors, tout de suite, les étiquettes pour faire un papier, quand il succède au « jeu des listes », quelques élèves demandent des stylos noirs pour faire une liste ; très vite, c'est le cas de tous.
La maîtresse précise que, pendant les ateliers, il est permis d'interrompre son travail pour aller fabriquer sa liste. Le lendemain, l'interrogation se déroule comme lors des « boîtes de couleurs ou du « jeu des listes ». Les élèves qui ont fabriqué une liste pensent (ou non) à la prendre et l'utilisent (ou non).

Stratégies d'écriture :
a) l'élève représente le contenu d'une boîte et quelques objets
b) l'élève représente tous les objets cachés mais en désordre, répartis au hasard sur la feuille
c) l'élève représente tous les objets cachés, en respectant les regroupements des boîtes mais sans contrôler convenablement l'espace entre les objets de manière à bien voir les séparations
d) l'élève signifie de manière explicite ces séparations

DESSIN A SCANNER n° 1

Stratégies de lecture :
1. l'élève prend sa liste et énumère tous les objets représentés : c'est le signe qu'il n'est pas encore entré dans le jeu
2. l'élève prend sa liste, repère ou non l'objet montré par la maîtresse et nomme apparemment deux objets au hasard : il a compris le jeu mais la liste n'est pas encore un outil efficace
3. l'élève prend sa liste, mais elle est incomplète, il ne trouve pas l'objet et dit qu'il ne peut pas répondre
4. l'élève prend sa liste, repère l'objet montré par la maîtresse et nomme deux objets voisins, cette lecture permet de réussir si la liste est convenablement organisée

Evolution des comportements et résultats des élèves :
En général, les premières listes ne comportent aucune partition, la majorité étant de type a ou de type b.
Pour les élèves ayant fait une liste de type a et capables de la lecture 3, la rétroaction de la situation est efficace, ils passent rapidement au niveau b ou c.
Après le débat, la stratégie d'écriture de la grande majorité des élèves évolue vers la stratégie d et ils effectuent une lecture de type 4.
De manière générale, il y a un effet de la lecture à la séance n sur l'écriture à la séance n + 1.

Pour les classes de moyens, l'évolution est plus difficile que chez les grands. Au début de la 3ème séance, la maîtresse organise **un débat** dont le point de départ est l'échec massif au jeu malgré la liste. Elle pose le problème et rappelle, comme pour le jeu des boites de couleur, que, si elle propose ce jeu, c'est qu'il existe un ou des moyens de gagner à tous les coups.

« Est-ce que la liste permet de gagner à tous les coups ? » La réponse obtenue est : « Non, on ne voit pas les boîtes sur la liste.»
Certains enfants se demandent comment on peut faire les quatre boîtes avec les trois objets ensemble. Si aucune proposition n'apparaît, la maîtresse propose elle-même l'idée de faire les boîtes mais sans préciser comment.
Le débat débouche donc sur l'idée que pour gagner il faut « faire les boîtes avec les trois objets dedans ».

C/« Le jeu de l'ordre »

Matériel :
- une sous-collection de 10 objets, toujours les mêmes, prélevée dans le référentiel
- une baguette de 130 cm, orientée à l'aide d'une pastille placée à l'une des extrémités, à laquelle sont suspendues 10 boîtes d'allumettes identiques dont les attaches sont fixées à intervalles réguliers par des punaises qui attestent que l'ordre des boîtes est immuable

- installation pour la phase d'écriture - installation pour la phase de lecture

DESSIN A SCANNER n° 2

Description de la situation :
Au début de chaque séance, la maîtresse réunit les élèves. Elle pose, devant eux, le bâton orienté où sont suspendues les boîtes et place, dans chacune des boîtes, un objet de la sous-collection.
D'une séance à l'autre, seule varie la place des objets dans les boîtes.
Consigne :
« J'ai mis un objet dans chaque boîte. Pour l'instant, les boîtes sont ouvertes mais, demain, elles seront fermées quand je vous appellerai pour jouer. Je vous montrerai une boîte avec cette pastille et il faudra me dire quel est l'objet qui est caché dedans. »
Elle va ensuite poser le dispositif sur une table en plaçant les boîtes ouvertes de part et d'autre du bâton selon une alternance convenue et différente à chaque séance.
Les élèves viennent alors librement, pendant qu'ils sont au travail dans les différents ateliers, « faire leur liste », c'est **la phase d'écriture**. Le soir, la maîtresse ferme les boîtes.
Le lendemain, la maîtresse soulève le bâton ce qui a pour effet de modifier brutalement l'agencement des boîtes puisqu'elles se retrouvent toutes suspendues à leur fil et alignées côte à côte. La maîtresse interroge les élèves un par un. Ils doivent pour réussir, nommer l'objet qui se trouve dans la boîte qu'elle désigne au moyen d'une pastille. C'est **la phase de lecture**.
L'ouverture de la boîte atteste de la réussite ou de l'échec. Si l'élève échoue, la maîtresse lui montre la boîte dans laquelle se trouve l'objet qu'il a nommé. C'est **la phase de validation**.

La situation se déroule ainsi pendant une douzaine de séances. La maîtresse note la place de l'élève, par rapport à l'orientation du bâton quand il vient faire sa liste. Au moment de la lecture, l'élève se place de manière aléatoire d'un côté ou de l'autre du bâton, la position du repère est donc soit la même soit inversée par rapport au moment de l'écriture; elle sera systématiquement inversée pour tous les élèves au cours des trois dernières séances, la maîtresse plaçant elle-même l'élève, d'un côté ou de l'autre en fonction de la place qu'elle a notée pour l'écriture.
Des moments de débats ponctuent ce déroulement, au cours desquels la classe fait le point sur les difficultés rencontrées et les solutions expérimentées.

Obstacles rencontrés[10] :
- obstacles liés à la représentation de l'ordre : la représentation attendue est le résultat d'une activité ordonnée qui repose sur les relations topologiques de voisinage. Mais cette relation ne suffit pas, il faut également disloquer ce premier voisinage pour prendre en compte un second. Or, cette coordination implique un ordre constant de parcours. Seul l'ordre de succession invariant de couple en couple permet de représenter l'ordre total.
- obstacles liés à la disposition de part et d'autre du bâton : le voisinage perceptif ne peut correspondre au voisinage réel si l'élève prend uniquement en compte les boîtes et non les points d'attache sur le bâton.
- obstacles liés au renversement du sens du bâton : quand l'élève n'est pas dans la même position à l'écriture et à la lecture, il faut qu'il se représente le retournement comme une inversion de l'ordre.

TABLEAU A SCANNER n°3

Type I : représentation correcte
Type II : ordre correct, pas de repère ou deux repères ou un repère faux
Type III : rabattement réussi mais oubli ou inversion

Type IV : rabattement incorrect
Type V : les boîtes sont alignées de part et d'autre du bâton mais les alignements ne sont pas coordonnés
Type VI : les boîtes sont alignées mais en désordre
Type VII : les objets sont dessinés en désordre dans la feuille

LISTES A SCANNER n°4

IV. CONCLUSION : RETOUR SUR LES CONDITIONS DIDACTIQUES PERMETTANT CES APPRENTISSAGES LOGIQUES

A/ Le rôle de l'individualisation

Si nous revenons à la comparaison avec les situations de familiarisation, nous voyons une différence essentielle : les activités individuelles ne sont pas de l'ordre du contrôle, mais complètement intégrées au processus d'apprentissage. Cette caractéristique nous paraît essentielle, car la majorité des élèves très jeunes ne peuvent pas s'investir dans un problème s'ils n'y sont pas personnellement confrontés. Nous observons constamment des élèves qui reçoivent des conseils de leurs pairs et qui ne les prennent pas en compte avant d'avoir éprouvé plusieurs fois les difficultés incontournables de la situation.

[10] Ils sont analysés de façon très détaillée par Peres (1988) dans *« Analyse des modifications des stratégies des enfants dans une situation d'apprentissage »* Actes de l'Université d'été : Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'Ecole élémentaire;

Cette dimension a plusieurs conséquences. Ce travail prend son sens dans la durée. Celle-ci doit être annoncée aux élèves avec la dévolution du problème. Pour le maître, certains moments comme les moments de lecture sont lourds à gérer, par exemple quand les élèves doivent laisser le travail en cours pour aller chercher leur liste dans leur casier et venir énumérer 10 objets.

B/ Les échanges entre les élèves et les débats.

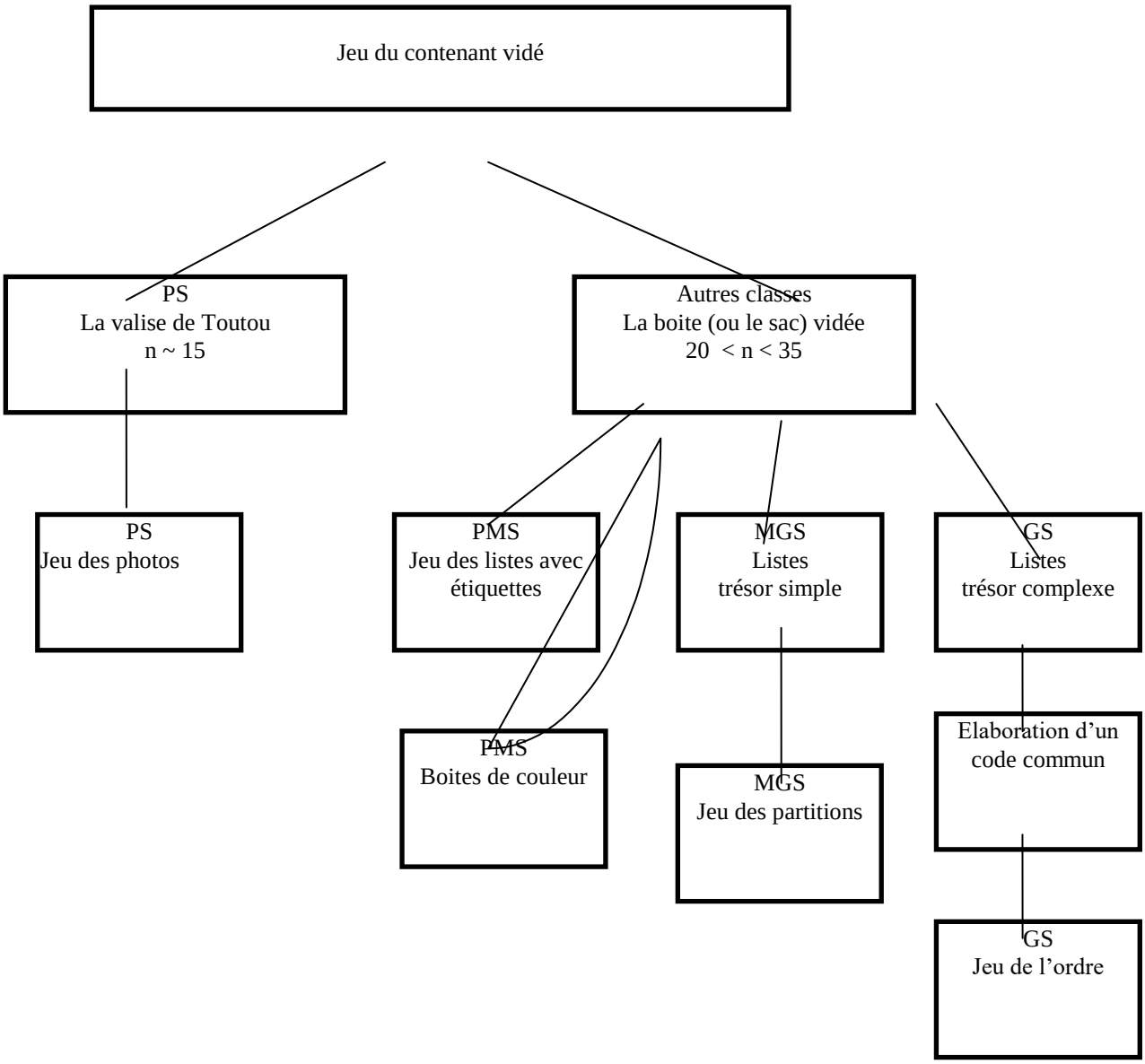
Ils sont essentiels. Ils sont de deux sortes, d'une part, des échanges informels pendant la fabrication des listes, sous forme de remarques au voisin, de conseils, de demandes, ainsi que pendant les moments où un élève est spectateur d'un autre en train de répondre au maître, lui-même étant déjà passé ; d'autre part, des échanges organisés par l'enseignant à propos de difficultés rencontrées et de la description des manières de faire pour les surmonter. Plus les élèves sont âgés, plus ces échanges sont riches. Mais attention, il ne s'agit pas pour l'enseignant de valider lui-même telle ou telle méthode. Aussi, il reste neutre, toujours en empathie avec les élèves et le groupe. Il veille à ce que les arguments présentés soient recevables, distribue la prise de parole. Chez les grands, pour « le jeu du Trésor » ou « le jeu de l'ordre », nous parlons de débats parce que des élèves défendent des positions différentes, et argumentent pour défendre la leur.

C/ Le rôle de l'enseignant

Dans les situations d'apprentissage que nous venons de décrire, le rôle du maître est essentiel. Dans un premier temps, il doit présenter le problème aux élèves, leur faire partager sa conviction qu'ils peuvent réussir et surtout que la solution dépend d'eux.
Ensuite, il est nécessaire d'encourager chacun individuellement afin que les obstacles rencontrés ne soient pas vécus comme des échecs mais comme des étapes vers une réussite prochaine.
Pour cela, le maître effectue un suivi rigoureux des élèves, de leurs échecs et de leurs réussites partielles, en se référant aux stratégies repérées au cours des recherches.
Ces situations ont été expérimentées un nombre suffisant de fois pour que nous puissions assurer qu'en en respectant les caractéristiques et l'esprit, il devrait se passer à peu près ce que nous observons. Mais nous savons bien qu'il y a beaucoup d'impondérables dans une vie de classe, aussi, le suivi permet de contrôler l'évolution et peut conduire à changer les valeurs de certaines variables ou à être attentifs à des contraintes matérielles que les recherches n'avaient pas encore relevées comme, par exemple, la disposition des étiquettes au moment du collage pour les listes des « boîtes de couleurs ».
Enfin, le maître institutionnalise non pas des savoirs mais des démarches.

D/ Les questions actuelles

Même si les situations se déroulent comme nous les avons prévues, nous nous demandons comment agir avec les élèves qui stagnent à certaines étapes ou pour lesquels les obstacles rencontrés sont trop importants. Une réponse peut être apportée par l'analyse des variables a priori qui permet de moduler les difficultés sans dénaturer la situation proposée. Une réflexion sur la notion d'étayage devrait donner des éléments.
En raison des contraintes liées à l'individualisation des moments de jeu, ces activités sont lourdes à gérer, intégrées à une vie de classe ordinaire. De plus, elles durent plusieurs semaines au cours desquelles l'élève a le sentiment, quelquefois douloureux, d'échouer. Le

maître doit avoir connaissance des difficultés qu'il peut rencontrer et, en même temps avoir suffisamment confiance en la richesse des apprentissages réalisés dans le cadre de *la théorie des situations didactiques.*

Organisation temporelle des différents jeux